NAISSANCE DES FEUILLETAGES, D'EHRESMANN-REEB À NOVIKOV

par André Haefliger

Cet exposé est centré sur la thèse de Reeb et sur son influence sur les premiers développements de la théorie des feuilletages à travers les problèmes qui y sont abordés.

Après avoir rappelé dans un premier paragraphe la notion de complète intégrabilité pour un champ de p-plans, j'évoque dans le deuxième paragraphe la naissance de la théorie des feuilletages en examinant dans l'ordre chronologique les notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris publiées par Ehresmann et Reeb de 1944 à 1948, année de la soutenance de la thèse de Reeb. Entre 1948 et 1954 Ehresmann y apportera des compléments importants, en particulier la notion d'holonomie, que nous décrivons dans le troisième paragraphe. Dans le paragraphe suivant, je mentionne les quelques contributions de ma thèse (55-58) et l'apport fondamental de Novikov en 1964-65 qui marque le début de l'âge d'or de la théorie.

Pour terminer, je mentionne 5 problèmes qui s'imposaient à tout lecteur de la thèse de Reeb au début des années cinquante. Ces problèmes ont joué un rôle considérable dans le développement de la théorie et j'indique brièvement les principales étapes de leur résolution.

Je remercie E. Ghys, A. Phillips et J. Pradines pour leurs commentaires constructifs.

1. Préliminaires.

Commençons par rappeler quelques notions mathématiques bien connues déjà au 19ème siècle[1], tout au moins dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Un champ K d'éléments de contact de dimension p (ou pour simplifier un champ de p-plans) de classe C^r sur une variété V est la donnée pour chaque point x de V d'un sous-espace $K(x)$ de l'espace tangent à V en x, variant r-différentiablement avec x. Si n est la dimension de V, on dit que $q = n - p$ est la codimension de K. Localement un tel champ peut être donné par l'annulation de p formes différentielles de degré 1 (formes de Pfaff) linéairement indépendantes en chaque point. Une sous-variété intégrale (sous-entendu de dimension p) pour un tel champ est une sous-variété connexe de V de dimension p tangente en chacun de ses points x à $K(x)$. Le champ K est dit complètement intégrable si par chaque point de V passe une sous-variété intégrale. Il en résulte (tout au moins si $r \geq 1$) qu'il existe au voisinage de chaque point de V des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ telles que K soit défini dans ces coordonnées par l'annulation des q formes $dx_{n-p+1}, \ldots, dx_n$,

[1] On pourra consulter à ce propos l'article *Propriétés générales des systèmes d'equations aux dérivées partielles. Equations linéaires du premier ordre*, de G. Floquet d'après E. von Weber, paru dans l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, (1910), Tome II, vol.4, p. 1-55.

les varétés intégrales dans ce système de coordonnées étant des morceaux ouverts des p-plans parallèles aux p premiers axes de coordonnées.

Lorsque K est complètement intégrable, par chaque point de V passe une variété intégrale complète (i.e. maximale) unique qui est une sous-variété immergée et V est l'union disjointe des variétés intégrales complètes.

Si $p = 1$, tout champ K de 1-plans de classe C^1 est complètement intégrable (cela résulte de l'existence de solutions pour les équations différentielles). Ce n'est plus le cas si $p > 1$. Par exemple dans l'espace euclidien à 3 dimensions, le champ de 2-plans donnés par l'annulation de la forme de Pfaff

$$\omega = dz - xdy + ydx$$

n'est pas complètement intégrable. Le long de l'axe Oz le champ est horizontal et l'intersection avec un cylindre d'axe Oz est un champ de directions tangentes à des spirales.

D'une manière générale, pour un champ de plans de codimension 1 donné par une forme de Pfaff ω, la condition d'intégrabilité équivaut à $\omega \wedge d\omega = 0$. Dans ce cas il existe localement une fonction non nulle λ, appelée un *facteur intégrant*, et une fonction ϕ, appelée une *intégrale première*, telles que $\omega = \lambda d\phi$. Les variétés de niveau de ϕ sont les variétés intégrales. Carathéodory [5] a donné en 1909 une caractérisation géométrique locale de la complète intégrabilité d'une forme de Pfaff ω, à savoir: ω est complètement intégrable si et seulement si, pour tout voisinage U de tout point x, il existe un point de U qui ne peut être relié à x par une courbe dans U tangente au noyau de ω. Il a utilisé cette caractérisation pour exprimer de manière remarquablement concise et conceptuelle le second principe de la thermodynamique[2]

Tout champ de vecteurs partout non nul définit un champ de 1-plans dont les variétés intégrales complètes sont les trajectoires ou solutions maximales de l'équation différentielle correspondante. Poincaré [2] a initié à la fin du 19-ème siècle l'étude qualitative globale des trajectoires de ce type, suivie par un nombre considérable de travaux, en particulier dans le cas où la variété ambiante est une surface (travaux de Bendixson [4], Denjoy [8] et Kneser [6] qui a considéré des champs de 1-plans non forcément orientés sur le 2-tore ou la bouteille de Klein). Signalons aussi le travail remarquable de Seifert [9] qui a donné une classification complète des fibrations en cercles des variétés compactes de dimension 3, certaines fibres pouvant être exceptionnelles.

Les solutions des équations différentielles dans le domaine complexe sont des sous-variétés de dimension réelle 2 et peuvent être considérées comme les variétés intégrales d'un champ de 2-plans complètement intégrable. Voir à ce propos l'article de E. Ghys [82] où il relève que Painlevé [3] est l'un des premiers "à comprendre qu'il est préférable de considèrer les *solutions* comme des surfaces de Riemann non paramétrées qui sont en général non singulières mais dont les projections sur les axes de coordonnées présentent des singularités".

Dans un groupe de Lie G connexe, les translatés à droite d'une sous-algèbre de Lie de dimension p de l'algèbre de Lie de G (identifiée à l'espace tangent à G en l'élément neutre) est un champ de p-plans complètement intégrable; les sous-variétés intégrales complètes sont les classes de G modulo un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie la sous-algèbre donnée.

[2]Je remercie Daniel Bennequin et Alain Chenciner qui m'ont signalé ce fait qui est aussi mentionné dans le livre de B. L. Reinhart [71].

Dans son livre *The theory of Lie groups* [13] paru en 1946, C. Chevalley appelle *distribution* ce que nous avons appelé plus haut *champ d'éléments de contact* et expose très soigneusement la caractérisation infinitésimale de l'intégrabilité (théorème dit de Frobenius) dans le cas analytique.

2. La thèse de Reeb.

Nous allons suivre la genèse de la thèse de Reeb en examinant successivement les notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences publiées par Ehresmann et Reeb de 1944 à 1948.

Le problème de l'existence d'un champ de 2-plans complètement intégrable sur la 3-sphère avait été posé par Hopf en 1935 déjà sous la forme suivante (cf. [75], Tome I,1-2 , p.507, et [70]) : existe-t-il sur la 3-sphère, munie de sa métrique riemannienne naturelle, un champ de vecteurs v partout non nul tel que le produit scalaire $v.rot(v)$ de v et de son rotationel s'annule? Cette condition équivaut à la condition de complète intégrabilité mentionnée plus haut pour la forme de Pfaff correspondant à v par l'isomorphisme entre vecteurs et formes dans une variété riemannienne. Citons Reeb [70] : "Ce problème a aussitôt retenu l'attention de Ehresmann qui a mis ce problème "en conserve" dans un magnifique régistre-répertoire que mon maître m'avait autorisé à consulter en 1942, non sans apporter une certaine solennité -justifiée- à la communication du registre. Comment taire ici un regret : le riche contenu du répertoire ne semble pas avoir été porté à la connaissance d'un public élargi?"

Ainsi pendant la guerre, à Clermont-Ferrand, où l'université de Strasbourg s'était repliée, Ehresmann propose à son élève Georges Reeb d'étudier les propriétés globales des champs d'éléments de contact complètement intégrables de dimension quelconque. On s'accorde à reconnaître que la note [11] soumise aux CRAS le 19 juin 1944 par Ehresmann et Reeb est l'acte de naissance de ce que Reeb appellera trois ans plus tard la théorie des variétés feuilletées.

Dans le premier paragraphe de cette note de deux pages, les auteurs rappellent la notion de champ K d'éléments de contact complètement intégrables sur une variété V, les variétés intégrales complètes étant définies comme les composantes connexes de V pour une topologie plus fine que celle donnée sur V (ayant comme base d'ouverts les variétés intégrales locales).

Dans le second paragraphe, ils montrent (théorème 1) que si V est la n-sphère ou l'espace euclidien de dimension n (et si p et $n-1$ sont pairs), la caractéristique d'Euler-Poincaré de toute variété intégrale compacte est nulle. C'est une observation importante (voir la fin de cette note), mais la démonstration qui en est donnée ici, et qui fait appel à des résultats de Gysin et Hopf, est curieusement indirecte. En effet Ehresmann avait déjà à sa disposition son théorème de relèvement des homotopies dans les espaces fibrés et il aurait suffit de remarquer que le fibré K restreint au complémentaire d'un point de S^n est trivial. Bien sûr Ehresmann le remarquera très vite plus tard, et l'énoncé de ce théorème sera grandement généralisé, voir [18].

Dans le troisième paragraphe, les auteurs énoncent (Théorème 2) un résultat remarquable, que l'on désigne maintenant sous le nom de théorème de stabilité globale de Reeb en codimension 1, et dont voici l'énoncé.

"**Théorème 2.** *Si K est un champ complètement intégrable d'éléments de dimension $n-1$ définissable par une forme de Pfaff*[3] *et si C_{n-1} est une variété intégrale*

[3]Ceci équivaut à supposer que K est transversalement orientable.

compacte à groupe de Poincaré fini, toute variété intégrale suffisamment voisine est homéomorphe à C_{n-1} *. Si de plus* V_n *est compact, toutes les variétés intégrales complètes sont homéomorphes à* C_{n-1} *et constituent un système de fibres de* V_n*. Si* V_n *est quelconque et si toutes les variétés intégrales complètes sont compactes, celles-ci sont homéomorphes et constituent un système de fibres de* V_n*.*

La démonstration fait intervenir des résultats de Bendixson sur les courbes définies par des équations différentielles."

Dans l'énoncé de ce théorème, il y a trois affirmations distinctes ; la première concerne les variétés intégrales complètes proches d'une variété intégrale compacte à groupe de Poincaré fini ; la seconde affirme que si la variété ambiante est compacte et s'il existe une variété intégrale compacte à groupe de Poincaré fini, alors toutes les variétés intégrales complètes sont les fibres d'une fibration de base un cercle (stabilité globale); enfin la troisième affirme que si toutes les variétés intégrales complètes sont compactes (pas forcément à groupe de Poincaré fini), alors elles sont les fibres d'une fibration (dont la base est un cercle ou une droite suivant que la variété ambiante est compacte ou non).

Notons que les deux premières affirmations n'ont aucun sens si les variétés intégrales sont de dimension 1 puisque dans ce cas une variété intégrale compacte est un cercle et a donc un groupe de Poincaré infini. Notons aussi que la brève indication sur la démonstration est très pertinente. Elle se réfère en effet aux résultats de Bendixson [4] sur les propriétés des familles de courbes définies par des équations différentielles dans le plan et beaucoup de ses raisonnements s'appliquent aux systèmes complètement intégrables en codimension 1. La structure d'ordre sur une petite courbe transverse aux variétés intégrales joue un rôle essentiel.

Enfin les auteurs décrivent le fameux exemple d'un champ de 2-plans complètement intégrable sur la 3-sphère (Ehresmann a précisé plus tard [26] que cet exemple était bien dû à Reeb), répondant ainsi par l'affirmative à la question de Hopf. Pour résoudre ce problème il fallait oublier la formulation analytique, et la reconsidérer d'une manière purement géométrique.

Voici une copie de ce dernier paragraphe.

"*Champs d'éléments plans* ($p = 2$) *complètement intégrables dans* $\mathbb{S}^3$ *ou* $\mathbb{R}^3$.

Toute surface intégrale compacte est homéomorphe au tore. Il existe effectivement des champs complètement intégrables admettant le tore comme surface intégrale. Par exemple dans le tore euclidien plein considérons la forme

$$rdr + (1 - r)d\phi$$

r, distance au centre du cercle méridien correspondant ; ϕ , longitude ; θ, latitude. Cette forme est complètement intégrable et admet le tore $r = 1$ comme surface intégrale. En identifiant les bords de deux exemplaires de ce tore plein, les méridiens de l'un étant identifiés avec les parallèles de l'autre on obtient un champ complètement intégrable sur $\mathbb{S}^3$ admettant un tore comme surface intégrale. Ce tore est adhérent à toutes les autres surfaces intégrales complètes, et celles-ci sont toutes élémentaires et non compactes."

Ainsi les auteurs rappellent d'abord qu'une variété intégrale compacte doit être nécessairement un tore (Th. 1). Cette remarque est un bon point de départ pour la construction. On imagine le tore plongé de manière naturelle dans l'espace ; il borde de chaque côté un tore plein qu'il s'agit de remplir avec des surfaces, l'une d'entre elles étant le bord. Notons que la forme de Pfaff qui décrit le champ de 2-plans est seulement continue (analytique dans le tore plein si on remplace $1-r$ par $1-r^2$), mais pas de classe C^1 le long du bord commun des tores pleins. Néanmoins il existe un homéomorphisme de la 3-sphère sur elle-même transportant ces variétés intégrales sur les variétés intégrales d'un champ de 2-plans indéfiniment différentiable, mais pas analytique comme le remarque Reeb dans sa thèse [26] p.113 (c'est là qu'il pose le problème de l'existence d'un feuilletage analytique sur la 3-sphère). En effet si on coupe le tore avec un plan contenant un méridien, l'intersection de ce plan avec les variétés intégrales situées à l'extérieur sont des spirales s'enroulant asymptotiquement autour du méridien, alors que les intersections avec les variétés intégrales complètes situées à l'intérieur sont des cercles concentriques. Si l'on considère l'application de premier retour de Poincaré dans ce plan relativement à une petite transversale coupant le méridien, on trouve une application qui est l'identité sur la partie de la transversale qui est à l'intérieur du tore et qui n'est pas l'identité à l'extérieur ; une telle application ne peut être conjuguée à une application analytique.

Dans la note suivante de 1945 [12], Reeb montre qu'une variété intégrale compacte homologue à zéro a sa caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Il étudie également les variétés intégrales complètes d'une forme de Pfaff fermée partout non nulle sur une variété compacte en fonction de la dépendance sur les rationnels de ses périodes.

En 1946, Reeb publie une note [14] dans laquelle il considère le cas d'une forme de Pfaff ω complètement intégrable (c'est à dire telle que $\omega \wedge d\omega = 0$) ayant un zéro isolé à l'origine de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Il remarque que si la matrice des dérivées partielles de cette forme à l'origine est définie (on dit que 0 est un centre), alors la forme admet un facteur intégrant. Il applique notamment le théorème de stabilité de la note de 1944 pour en conclure que si une forme intégrable sur une variété compacte de dimension $n \geq 3$ n'a comme points singuliers que des centres, cette variété est homéomorphe à une sphère et les variétés intégrales sont les variétés de niveau d'une fonction différentiable. (C'est un théorème beaucoup plus fort que celui que Milnor a utilisé dans son premier travail [30] sur les structures exotiques des sphères S^7, sous le nom de théorème de Reeb, et qui affirme qu'une variété compacte ayant une fonction de Morse avec seulement un minimum et un maximum est une sphère.)

En 1947 paraissent conjointement dans le même fascicule des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences deux notes fondamentales, une d'Ehresmann *"Sur les espaces fibrés différentiables"* [16] et une de Reeb *"Variétés feuilletées, feuilles voisines"* [17].

Dans la première, Ehresmann définit la notion de fibré différentiable d'espace total E, base B, projection p de E sur B et fibre type F. Il énonce ensuite comme proposition 1 le fait fondamental qu'une submersion différentiable d'une variété compacte connexe E sur une variété connexe B est la projection d'une fibration. Il introduit ensuite la notion de connexion infinitésimale comme étant la donnée d'un champ d'éléments de contact de dimension égale à celle de la base et transverse aux fibres. Il remarque qu'un tel champ existe toujours (aussi dans le cas d'une submersion; c'est en fait la clé de la démonstration de la proposition 1). Il montre ensuite que si ce champ est complètement intégrable et si les fibres de p sont compactes, alors les variétés intégrales complètes sont des revêtements de B et qu'on a une représentation du groupe de Poincaré de B basé en un point x dans un groupe d'automorphismes de la fibre au-dessus de x.

Dans la note qui suit, Reeb introduit pour la première fois la terminologie *feuille* (au lieu de *variété intégrale complète*). Il donne d'abord une définition (inspirée par Ehresmann, cf. [27], p.96) de la notion de structure de variété feuilletée de dimension p et codimension $q = n - p$ sur une variété topologique V de dimension n ; une telle structure est définie par un atlas formé de cartes qui sont des homéomorphismes d'ouverts de V sur des ouverts de l'espace numérique $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, les changements de cartes appartenant au pseudogroupe des homémorphismes locaux de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ localement de la forme

$$(x, y) \mapsto (g(x, y), h(y)), \quad x \in \mathbb{R}^p, \ y \in \mathbb{R}^q.$$

Les changements de cartes appliquent des morceaux ouverts de p-plans horizontaux homéomorphiquement sur des morceaux de p-plans horizontaux. Ils sont donc continus pour la topologie de $\mathbb{R}^n$ admettant ces morceaux comme base d'ouverts, d'où une topologie sur V qui en fait une variété de dimension p dont les composantes connexes sont les feuilles. L'ordre de différentiabilité des changements de cartes est par définition celui de la structure feuilletée. Cette définition oublie temporairement le champ d'éléments de contact et prend un sens précis dans le cas topologique. De plus elle permet une grande souplesse pour décrire des structures plus précises, en imposant aux changements de cartes d'appartenir à des sous-pseudogroupes particuliers, par exemple ceux qui pourraient préserver une structure complexe ou symplectique dans les variables y ou une structure riemannienne à courbure constante -1 dans les p-plans horizontaux, etc.

Une terminologie fort bien adaptée et suggestive a pris naissance[4]. Dans l'esprit de Reeb, localement une structure feuilletée est formée de sous-variétés parallèles comme les feuilles d'un livre ou encore mieux comme celles d'une pâte feuilletée (cf. Reeb [70]). Le terme "structure feuilletée" apparaît dans le Littré pour qualifier la structure de certaines roches. La traduction anglaise n'a pas été évidente. H. Samelson qui a référé pour les Math. Reviews tous les travaux de Reeb et Ehresmann jusqu'en 1955 traduit "feuille" par "leaf" et "variété feuilletée" par "leaved manifold" ou exceptionnellement "laminated manifold" (idem pour Chern qui a référé ma note de 1956). La traduction "foliation" a été utilisée par Ehresmann dans ses conférences données à Princeton[5] en 1953-54 (D.C. Spencer assistait à ces conférences et il est probable que cette traduction se soit dès lors imposée sur la côte Est des USA).

Dans cette note Reeb annonce aussi son fameux théorème de stabilité en codimension quelconque, à savoir que si une feuille F d'un feuilletage topologique est compacte et à groupe de Poincaré fini, alors toutes les feuilles rencontrant un voisinage convenable de F sont aussi compactes et à groupe de Poincaré fini. De plus si le feuilletage est deux fois différentiable, alors les feuilles voisines de F sont des revêtements de F.

[4] Dans son livre "Le Jargon des Sciences" (Paris, Hermann, 1966), l'écrivain Etiemble mentionne (p.76) plusieurs termes créés par les mathématiciens, dont "feuilleté". Je le cite: " Le pittoresque voulu de chacun de ces mots favorise l'intuition et seconde l'imagination." Et plus loin (p.77): " *Théorie des variétés feuuilletées, espace fibré différentiable*, vous êtes irréprochables.(...) Pour des concepts très neufs, on n'a pas eu recours au grec, ni à l'américain; on s'est contenté d'ajouter un sens plus précis à tel vieux mot de la tribu; on s'est contenté de faire comme Mallarmé, à d'autres fins."

[5] Voir le fac-similé reproduit au début de la partie II.2 de ses oeuvres complètes [75].

Reeb s'est évidemment posé la question de savoir si le théorème de stabilité globale en codimension 1 avait un analogue en codimension supérieure à 1. Il y répond partiellement l'année suivante dans une note [19] en construisant un exemple de feuilletage de codimension 2 sur une variété compacte ayant des feuilles compactes simplement connexes et des feuilles compactes à groupe de Poincaré infini.

Enfin en 1948, il publie une note [20] où il démontre qu'une forme de Pfaff complète-ment intégrable holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n, n \geq 3$, et ayant un point singulier non dégénéré à l'origine admet une intégrale première holomorphe. Il en déduit le théorème analogue dans le cas analytique réel.

Reeb soutient sa thèse en 1948 et les détails des démonstrations seront publiés en 1952 dans un livre [27] contenant conjointement la thèse de Wu Wen-Tsun et la sienne.

3. Compléments dûs à Ehresmann.

Autour de 1950, Ehresmann dégage une notion absolument essentielle pour les feuilletages qu'il appellera holonomie, et qui était sous-jacente, mais non explicitée, chez Reeb.

Dans son exposé au Colloque de Topologie de Bruxelles ([23], paragraphe 4), il reprend en les précisant les considérations de sa note de 1947 [16]. Il considère une connexion infinitésimale intégrable dans un fibré différentiable d'espace total E et de base connexe B, c'est-à-dire un champ d'éléments de contact transverse aux fibres de dimension égale à celle de la base. Il suppose que tout chemin dans la base peut se relever suivant un chemin horizontal pour la connexion, c'est-à-dire tangent aux éléments de contact du champ (c'est toujours le cas si la fibre F est compacte). Par relèvement des chemins, cette situation détermine un homomorphisme H du groupe fondamental de B basé en $x_0 \in B$ dans un groupe d'automorphismes de la fibre au-dessus de x_0, appelé l'*holonomie* de la connexion:

$$H : \pi_1(B, x_0) \to Aut(F).$$

Il remarque que la donnée de H permet de reconstruire à la fois le fibré E et le feuilletage transverse aux fibres, à savoir

$$E = \widetilde{B} \times F/(\tilde{x}, y) \text{ équivalent à } (\gamma.\tilde{x}, H(\gamma)(y)), \quad \gamma \in \pi_1(B, x_0)$$

où $\widetilde{B}$ est revêtement universel de B sur lequel le groupe fondamental opère par translations de revêtement. Le feuilletage transverse aux fibres est le quotient du feuilletage horizontal sur $\widetilde{B} \times F$.

Cette construction réciproque (appelée suspension de H) est fondamentale pour construire de multiples exemples de feuilletages intéressants et montre une relation intime entre actions par difféomorphismes de groupes discrets sur les variétés et théorie des feuilletages.

Il remarque que cette situation s'applique au cas où B est une feuille compacte d'un feuilletage différentiable admettant un système fondamental de voisinages tubulaires saturés par des feuilles; les fibres d'un tel voisinage tubulaire assez petit seront transverses aux feuilles, et l'on aura donc un homomorphisme H du groupe fondamental de B en x dans le groupe des difféomorphismes d'un petit disque transverse aux feuilles centré en x et fixant x. Il note que, si toutes les feuilles voisines de B sont compactes, l'image de H est un groupe fini (grâce à un théorème de Montgomery) et conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Ehresmann observe aussi dans cet article que le fibré tangent aux feuilles d'un feuilletage une fois différentiable a une connexion linéaire plate naturelle (il avait déjà fait cette remarque en 1948 dans [18]). Une connexion du fibré tangent à la variété feuilletée dont la restriction aux feuilles coïncide avec cette connexion plate est un des ingrédients essentiels dans la démonstration du théorème d'annulation de Bott [46]. L'autre est la théorie des classes caractéristiques et de l'homomorphisme de Chern-Weil admirablement expliqué par H. Cartan dans ce même colloque de topologie de Bruxelles [24] dont les deux exposés encadrent celui de Ehresmann. C'est dire que le théorème d'obstruction de Bott (1968) [46], qui se prouve en une demi-page à partir de ces deux ingrédients, aurait pu être démontré à cette époque déjà (cf. [81],volume 3, page XXVIII).

Dans une série de conférences données à l'Université de Princeton en 1953-54 dans le cadre du séminaire de Lefschetz, Ehresmann a généralisé comme suit ces considérations au cas d'une feuille quelconque B d'un feuilletage de classe C^r, où $r \geq 1$, de codimension q. Soit c un chemin dans B, c'est-à-dire une application continue de l'intervalle $[0,1]$ dans B, et soient T et T' des petits disques de dimension q transverses aux feuilles centrés respectivement en $c(0) = x$ et $c(1) = x'$. On peut construire une famille continue de chemins c_y, paramétrée par les points y d'un petit voisinage U de x dans T, le chemin c_x étant égal à c et chaque chemin c_y étant contenu dans la feuille passant par y et reliant y à un point y' de T'.

L'application envoyant y sur y' est un difféomorphisme de classe C^r de U sur un voisinage U' de x' dans T'. Le fait fondamental à démontrer est que le germe (Ehresmann disait le jet local) de ce difféomorphisme en x ne dépend que de la classe d'homotopie de c dans B à extrêmités fixes. On en déduit donc en particulier, si $T = T'$, un homomorphisme H du groupe fondamental de B basé en x dans le groupe des germes en x des difféomorphismes locaux de T fixant x. Cet homomorphisme est appelé l'*holonomie* de la feuille B et son image est le *groupe d'holonomie* de B. Il est bien défini à conjugaison différentiable près si l'on change la section transverse T et le point base dans B. Il faut noter qu'à l'époque, la notion de germe n'était pas encore familière à tous !

Ehresmann remarque aussi que le théorème de stabilité de Reeb reste valable si l'hypotèse que la feuille compacte B a un groupe de Poincaré fini est remplacée par l'hypothèse que la feuille compacte a un groupe d'holonomie fini.

Plus généralement considérons une sous-variété T transverse aux feuilles, de dimension complémentaire, et coupant chaque feuille au moins une fois. On peut appliquer la construction précédente en faisant varier x et x' dans T et obtenir ainsi le pseudogroupe P d'holonomie du feuilletage associé à la transversale T. Le groupe d'holonomie de la feuille passant par le point x de T est conjugué au groupe des germes en x des éléments de P fixant x. Le pseudogroupe d'holonomie P' associé à une autre transversale T' vérifiant des propriétés analogues est équivalent à P dans un sens naturel[6].

Après l'introduction par Ehresmann de l'holonomie, on peut dire que les fondements de la théorie des feuilletages étaient en place. Ehresmann n'a rédigé ses idées sur l'holonomie que trois ans plus tard dans une courte note aux CRAS publiée en collaboration avec Shih Weishu en 1956 [29] et dans un cadre beaucoup plus général

[6]Cette relation d'équivalence évidente n'a été explicitée par écrit que beaucoup plus tard, lorsque cette notion s'est avérée nécessaire dans la formulation de certains énoncés (voir par exemple Bouma-Van Est, Indag. Math., 40 (1978), p. 313-347 et les papiers de Van Est qui ont suivi, ainsi que Haefliger, J. Diff. Geom. 15 (1980), p.269-347).

(voir aussi [35], reproduit dans [75], tome II.2). C'est aussi dans cette note que le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage (appelé parfois maintenant le graphe du feuilletage) est introduit pour la première fois, mais sans topologie (elle sera définie dans [35]).

4. De Reeb à Novikov.

C'est en automne 1954 que je suis arrivé à Strasbourg comme boursier du gouvernement français pour étudier sous la direction d'Ehresmann. C'est René Thom qui m'a expliqué les idées d'Ehresmann sur l'holonomie durant l'hiver 54-55 (Ehresmann était souvent en voyage). J'ai réalisé assez vite que, dans le cas différentiable, l'holonomie d'une feuille propre F (c'est à dire telle que sa topologie de feuille coincide avec la topologie induite) permettait de reconstruire le germe de voisinage feuilleté de F et le caractérisait. L'année suivante j'ai démontré la non-existence de feuilletages analytiques de codimension 1 sur les variétés compactes simplement connexes [28], répondant en particulier par la négative à la question posée par Reeb concernant l'existence d'un feuilletage analytique sur la 3-sphère.

L'idée de la démonstration est simple. On observe tout d'abord qu'un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte V simplement connexe possède une feuille non compacte et qu'en général, en codimension 1, une feuille non fermée est toujours coupée par une courbe transversale fermée. Comme V est supposée simplement connexe, il existe une application différentiable f d'un disque D de dimension 2 dans V telle que la restriction de f au bord du disque soit la transversale fermée. On peut supposer f en position générale par rapport aux feuilles. On regarde alors la trace du feuilletage sur le disque : c'est un feuilletage de dimension 1 avec un nombre fini de singularités qui sont du type maxima-minima ou point selle. En utilisant les techniques classiques de Poincaré-Bendixson, on constate qu'il existe forcément une courbe fermée sur une feuille dont l'holonomie est l'identité d'un côté et une contraction de l'autre, ce qui contredit l'analyticité.

Après cela j'ai demandé à Ehresmann si les résultats que j'avais obtenus pourraient suffire pour une thèse. Il m'a répondu : " Oui si vous démontrez en plus que pour tout feuilletage de la 3-sphère, il existe une feuille compacte !". Malheureusement je n'ai pas réussi à répondre à cette question qui était dans l'air depuis longtemps, problème que Helmut Kneser avait abordé plusieurs fois sans succès et qui sera résolu par Novikov en 1964.

J'ai donc dû me contenter de rédiger en détails mes résultats partiels tout en essayant de comprendre plus profondément ce que pouvait signifier l'image réciproque sur un espace topologique K d'un feuilletage de codimension q et de classe C^r sur une variété V par une application continue f de K dans V (plus haut K était le disque unité D). Ceci m'a conduit à introduire la notion de Γ-structure sur K, où Γ était dans ce cas le groupoïde des germes de difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}^q$. Par exemple si f est l'inclusion d'une feuille F dans V, alors la structure induite est précisément l'holonomie de F. Ceci conduisait naturellement à mettre l'accent sur la structure transverse modelée par un pseudogroupe ou plus généralement un groupoïde topologique Γ . La notion de microfibré feuilleté associé à une Γ-structure apparaissait explicitement dans les deux cas particuliers traités en détails (holonomie d'une feuille et structure transversalement analytique de codimension un), mais les outils pour le cas général étaient présents. Malheureusement la rédaction [33] dans cette généralité est devenue parfaitement illisible. Pour cette raison, j'ai profité d'un cours au CIME à Urbino en 1962 [36] pour réexpliquer les résultats de la thèse de Reeb à la lumière des idées d'Ehresmann sur l'holonomie, et les résultats de ma thèse (en omettant la notion de Γ-structure, notion qui jouera douze ans plus tard [51] un rôle fondamental (voir les articles d'Anosov dans [84], volume 4, p.43-45 et 352-353).

Revenons en 1956. La thèse de Reeb était encore largement méconnue. A part un petit cercle autour d'Ehresmann, personne ne s'intéressait aux feuilletages. D'autres sujets passionnants émergeaient en topologie différentielle, par exemple la découverte par Milnor de structures différentiables exotiques sur des sphères ou l'étude des singularités des applications différentiables par Thom et Whitney. Dès 1958 mes intérêts se sont tournés vers la topologie différentielle et je ne suis revenu aux feuilletages de manière active qu'en 1969 quand j'ai eu connaissance de la remarquable découverte par Bott [46] d'une obstruction à la complète intégrabilité.

Jetons encore un bref coup d'oeil à la liste des publications concernant les feuilletages entre 1950 et 1963. A part celles d'Ehresmann et de ses élèves, notons le travail [25] très intéressant de Seifert (1950) qui montre qu'un feuilletage de dimension 1 sur $\mathbb{S}^3$ assez proche de la fibration de Hopf a toujours une feuille fermée et qui pose la question de savoir si un champ de vecteurs partout non nul sur $\mathbb{S}^3$ a toujours une trajectoire périodique (problème résolu par la négative beaucoup plus tard par P. Schweitzer en 1975 dans le cas C^1 et par Krystina Kuperberg en 1993 dans le cas C^∞, voir le rapport de E. Ghys [79]). Notons aussi le beau résultat de Milnor [32] en 1958 qui montre qu'un fibré vectoriel de rang 2 sur une surface orientable compacte S de genre ≥ 0 a une connexion linéaire plate, si et seulement si sa caractéristique d'Euler est bornée en valeur absolue par la moitié de la valeur absolue de la caractéristique d'Euler de S. En 1956 B. Reinhart soutient une thèse sous la direction de D. C. Spencer concernant les formes harmoniques sur les variétés feuilletées, et en 1959 il introduit la notion fondamentale de feuilletage riemannien [34], notion qui généralise en codimension supérieure celle de feuilletage donné par une 1-forme fermée étudiée dans la thèse de Reeb. Mentionnons aussi la thèse de R. Palais [31] en 1957 où la notion de feuilletage est utilisée dans l'étude des groupes de transformations (dans la lignée du livre de Chevalley [13]).

En 1963 Ehresmann et Reeb ont organisé un colloque sur les feuilletages à Grenoble qui a révélé un début d'intérêt outre-atlantique pour le sujet et plusieurs exposés ont été publiés dans les annales de l'Institut Fourier. C'est là que R. Sacksteder a publié ses premiéres contributions aux feuilletages, en particulier un exemple d'un ensemble minimal exceptionnel. Signalons aussi un travail remarquable de Sacksteder [39], (soumis en avril 1964), peut-être le premier où la notion globale de pseudogroupe d'holonomie (et non seulement de groupe d'holonomie) est exploitée à fond. D'un théorème sur les pseudogroupes, il déduit en particulier que si un feuilletage de codimension 1 et de classe C^2 sur une variété compacte possède un minimal exceptionnel saturé par des feuilles, alors il existe un élément d'un groupe d'holonomie d'une feuille dont la dérivée est contractante.

La note de Novikov " Foliations of codimension 1 on manifolds " [37] parue en russe dans les Doklady en 1964, où il esquissait une démonstration que tout feuilletage de la 3-sphère par des surfaces possédait une feuille compacte a eu un impact considérable et a joué un rôle de catalyseur. Apparemment Novikov s'est intéressé aux feuilletages après la découverte par Anosov en 1962 des feuilletages naturels stables et instables associés au flot géodésique sur les variétés à courbure négative.

Dans cette note, Novikov commence par remarquer que, dans un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur une variété compacte V, il existe une relation d'ordre partiel naturel dans l'ensemble des feuilles. La relation d'équivalence associée donne une décomposition de V en sous-ensembles saturés par des feuilles, qui peuvent être (théorème 1) soit réduits à une seule feuille compacte (si et seulement si cette feuille n'est pas coupée par une transversale fermée), soit un ouvert de V bordé par un nombre fini ≥ 0 de feuilles compactes (il se peut que cette composante soit V tout entier). Par exemple dans le feuilletage de Reeb, il y a 3 composantes : la feuille homéomorphe au tore et les intérieurs des deux tores pleins complémentaires, appelés depuis composantes de Reeb. Le théorème 2 affirme que si V est de dimension 3 et à groupe de Poincaré fini, alors il existe une feuille compacte qui borde une composante de Reeb. Si l'on cherche une telle composante, on doit pouvoir trouver dans V une courbe fermée C sur une feuille, non homotope à zéro sur cette feuille, qui peut être poussée d'un certain côté sur les feuilles voisines (c'est à dire l'holonomie de C est triviale de ce côté) suivant des courbes fermées homotopes à zéro sur ces feuilles. Une telle courbe sera appelée ici un cycle évanouissant. L'existence d'un tel cycle est le premier pas de la démonstration et n'est pas spécifique à la dimension 3 (sa démonstration pousse un peu plus loin l'argument du lemme fondamental de ma thèse). Une deuxième note [38], publiée quelques mois plus tard, généralise le théorème principal en affaiblissant les conditions pour l'existence d'un cycle évanouissant et précise qu'en dimension 3, si une feuille porte un cycle évanouissant, alors cette feuille est un tore bordant une composante de Reeb.

Les indications données par Novikov dans ces deux notes n'ont pas été suffisantes pour que nous puissions reconstruire la démonstration du théorème principal. Ce travail a pourtant eu tout de suite une grande influence. Par exemple, j'avais décrit en 64 les résultats de Novikov dans un colloque de topologie à Manchester et à la fin de l'exposé, Likorish avait déjà compris comment on pouvait feuilleter toutes les variétés de dimension 3 (voir [40]), résultat démontré indépendamment par Zieshang qui était en contact avec Novikov, voir [41]. Ce n'est que vers la fin de 1966 que j'ai pris connaissance du travail fondamental de Novikov (The Topology of Foliations [41]) qui contenait les détails des démonstrations (certains sont très subtils et ingénieux), et grâce à l'aide d'Israel Bernstein qui m'a traduit du russe des passages essentiels, j'ai pu exposer en détails la démonstration de l'existence d'une feuille compacte en janvier 67 dans le séminaire de " Current Literature " commun à l'Université de Princeton et l'Institute for Advanced Study. Les notes rédigées de cet exposé ont circulé à Berkeley notamment (et ont été traduites pour un séminaire Bourbaki [42] en 68). Novikov a fait une visite aux Etats-Unis en 1967, et lorsqu'il a passé à Berkeley il a été très surpris de rencontrer tant de jeunes mathématiciens travaillant sur les variétés feuilletées. C'est dire qu'en quelques années, la situation avait radicalement changé et que la théorie des feuilletages devenait un sujet à la mode.

Simultanément en France, Harold Rosenberg avait commencé à étudier les feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 3 et les actions localement libres de $\mathbb{R}^n$ sur des variétés. Il avait obtenu de nombreux résultats, par exemple l'irréductibilité des 3-variétés feuilletées[7] sans composantes de Reeb [43] et com-

[7]Pour un survol des relations entre topologie des variétés de dimension 3 et feuilletages, voir Gabai [80].

mençait à diriger d'excellents élèves dans ces directions.

En relation directe avec la thèse de Reeb, signalons pour terminer la remarquable généralisation par Thurston [62] des théorèmes de stabilité (globale et locale) de Reeb, où l'hypothèse que le groupe de Poincaré d'une feuille compacte F est fini est remplacée dans le cas C^1 par l'hypothse que $H^1(F, \mathbb{R}) = 0$ et que, en codimension 1 le feuilletage est transversalement orienté, et en codimension > 1 l'holonomie infinitésimale est triviale.

5. Quelques problèmes issus de la thèse de Reeb.

Mentionnons quelques problèmes posés explicitement ou implicitement dans la thèse de Reeb.

1. Si une variété V admet un champ continu K d'éléments de contact de dimension p, admet-elle un feuilletage de dimension p ? (cf. Reeb [27], p.95). Plus précisément, K est-il homotope à un champ complètement intégrable ?
2. Existe-t-il un feuilletage analytique réel de codimension 1 sur $\mathbb{S}^3$?. Tout feuilletage de codimension 1 de $\mathbb{S}^3$ possède-t-il toujours une feuille compacte ?
3. Dans un feuilletage topologique, les feuilles voisines d'une feuille compacte F simplement connexe sont-elles homéomorphes à F. De manière équivalente, une submersion topologique propre est-elle une fibration ?
4. Si un feuilletage sur une variété compacte a toutes ses feuilles compactes, est-ce que chaque feuille possède un système fondamental de voisinages saturés par des feuilles, c'est à dire le groupe d'holonomie de chaque feuille est-il fini? (ou de manière équivalente le volume des feuilles est-il borné ?).
5. A quelle condition une forme de Pfaff holomorphe complètement intégrable avec singularités admet-elle localement une intégrale première?

Retraçons très brièvement l'évolution de ces problèmes. Comme nous venons de le voir, la première partie du deuxième problème a été résolue par Haefliger [28] en 1956 et la deuxième partie par Novikov [37] en 1964. Pour la solution du troisième problème, il a fallu attendre les résultats profonds de Kirby-Siebenmann sur l'extension des isotopies topologiques, voir Siebenmann [56]. Complétant des résultats de R. Moussu [68], Malgrange [69] a apporté une solution très satisfaisante au cinquième problème en montrant qu'une 1-forme holomorphe complètement intégrable admet un facteur intégrant au voisinage d'un point singulier si la codimension des points singuliers est au moins trois.

L'histoire du quatrième problème est très intéressante. D. Epstein a répondu d'abord par l'affirmative à la question 4 en 1972 dans le cas des variétés compactes de dimension 3 [57], en démontrant que, pour tout flot sans point fixe sur une variété de dimension 3 ayant toutes ses orbites périodiques, il existe une action du cercle ayant les mêmes orbites. La démonstration de ce résultat est très délicate et ingénieuse, et les techniques initiées par David Epstein ont influencé tous les travaux ultérieurs sur ce probléme. Ainsi Edwards, Millett et Sullivan [66] ont montré que le résultat d'Epstein se généralisait en codimension 2, à savoir que, pour tout feuilletages de codimension 2 d'une variété compacte dont toutes les feuilles sont compactes, le volume des feuilles reste borné (ou de manière équivalente, tous les groupes d'holonomie sont finis). L'exemple par Sullivan [67] d'un flot sans point fixe sur une variété compacte de dimension 5 dont la longueur des orbites n'est pas borné a créé une grande surprise. Cet exemple a été suivi par beaucoup d'autres et finalement E. Vogt [73] a réussi le tour de force de construire un feuilletage en cercles de $\mathbb{R}^3$.

Le premier problème, celui de l'existence de feuilletages, est bien sûr fondamental et naturel. A l'époque de la thèse de Reeb on ne connaissait que peu d'exemples de feuilletages, et surtout de variétés compactes admettant des feuilletages de dimension > 1 (en dehors des fibrations). Comme on l'a vu plus haut, Lickorisch [40] et Zieschang [41] ont démontré indépendamment en 1965 par des constructions explicites l'existence de feuilletages de codimension 1 sur toute variété orientable de dimension 3 et J. Wood [47] a montré en 1969 que tout champ de 2-plans transversalement orientable sur une variété de dimension 3 est homotope à un champ complètement intégrable. Il a fallu attendre 1970 pour avoir les premiers exemples par Lawson [53] de feuilletages de codimension 1 sur des sphères de dimension impaire supérieure à trois, et l'année suivante (Tamura et Durfee) pour des exemples de feuilletages de codimension 1 sur toutes les sphères de dimension impaire (voir le survol de Lawson [61]). A. Phillips ([44] et [45]) a montré en 1968 que sur une variété connexe ouverte, tout champ de p-plans dont le complémentaire est un fibré trivial (ou plus généralement à groupe structural discret) était homotope à un champ complètement intégrable, en utilisant sa théorie des submersions.

La découverte par Raoul Bott [46] en 1968 de champs de p-plans non homotopes à un champ complètement intégrable a ouvert des perspectives insoupçonnées jusqu'alors. Bott montre que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de classe C^2 de dimension p et codimension q sur une variété M, alors les classes de cohomologie réelles de M qui sont des polynômes dans les classes de Pontrjagin du fibré vectoriel normal aux feuilles devaient s'annuler en degrés supérieurs à $2q$. Cette condition ne dépend que de la classe d'homotopie du champ de p-plans tangents aux feuilles. Comme on l'a mentionné plus haut, la démonstration de Bott est très directe et naturelle. A ma connaissance cette condition d'annulation est à ce jour la seule obstruction connue pour déformer un champ de p-plans en un champ complètement intégrable.

Cette découverte et les travaux de Phillips mentionnés ci-dessus m'ont motivé pour reprendre les idées de ma thèse et construire un espace classifiant $B\Gamma$ pour les Γ-structures (voir [50],[51] et [72], p. 82 pour un énoncé plus précis). En utilisant le théorème de transversalité de Gromov-Phillips [48] et [49], on y montre qu'il existe une théorie d'obstructions pour l'existence d'un feuilletage sur une variété connexe *ouverte* ayant une structure transverse modelée par Γ (supposé formé de germes de difféomorphismes locaux). Lorsque Γ est le groupoïde topologique Γ_q^r de tous les germes de difféormorphismes de $\mathbb{R}^q$ de classe C^r, on a une application naturelle $D : B\Gamma_q^r \to BGl_q$, induite par la différentielle, qu'on peut remplacer à homotopie près par une fibration. Le théorème d'annulation de Bott peut s'exprimer de la manière suivante: pour $r \geq 2$, l'homomorphisme $H^*(BGl_q, \mathbb{R}) \to H^*(B\Gamma_q^r, \mathbb{R})$ induit par la projection D s'annule pour $* > 2q$. Thurston a démontré le résultat extrêmement remarquable suivant pour $r = \infty$: si K est un champ de p-plans de codimension q sur une variété M, il est homotope à un champ C^∞ complètement intégrable si et seulement si l'application de M dans BGL_q classifiant le fibré normal à K peut se relever suivant une application dans $B\Gamma_q^r$ (pour M compacte ou non et $q > 1$, voir Thurston [59] et aussi Eliashberg-Mischachev [83], et pour $q = 1$, voir Thurston [65]). Théoriquement on a donc en principe une théorie d'obstructions classique pour le problème No 1 posé par Reeb. Tout la difficulté est de calculer le type d'homotopie de la fibre homotopique de D, notée $B\overline{\Gamma}_q^r$. Mather en 1971 déjà a découvert [52] que, pour $q = 1$, l'homologie de cette fibre était intimément liée à celle de l'homologie du groupe des difféomorphismes à support compact de $\mathbb{R}$ isotopes à l'identité (considéré comme groupe discret); ce résultat a été ensuite étendu par Mather et Thurston en toute codimension q. En particulier $B\overline{\Gamma}^r_q$ est $q+1$-connexe, si $r \neq q+1$ (voir le rapport de Mather [64] et ceux de Thurston [63] et [60]); c'est un résultat très profond qui équivaut à la simplicité du groupe des difféomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^q$ isotopes à l'identité (dans [58] Thurston montre comment cette propriété peut être utilisée directement pour montrer qu'un champ de 2-plans est homotope à un champ complètement intégrable). Selon le même principe, Thurston a montré que le résultat de Mather [55] sur la trivialité de l'homologie du groupe des homéomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^q$ entraîne qu'il n'y pas d'obstruction à déformer un champ de p-plans en un champ tangent à un feuilletage topologique. Entre-temps la découverte par Godbillon et Vey de leur fameux invariant [54] a révélé une connexion profonde entre la cohomologie de Gelfand-Fuks de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}^q$ et la cohomologie de la fibre de D et a permis de montrer la non-trivialité de plusieurs groupes de cohomologie de cette fibre. Malgré tous ces résultats spectaculaires et très profonds obtenus dans les années 70, le type d'homotopie de $B\overline{\Gamma}^r_q$ est encore très mal connu. Depuis cette époque, à part de rares exceptions (voir Tsuboi [76] et [77] qui a montré que $B\overline{\Gamma}^1_q$ est contractile), pratiquement aucun progrès n'a été réalisé. La solution des questions les plus naïves, par exemple la connexité de cette fibre pour $q > 1$ ou la détermination de son premier groupe d'homotopie non nul, semble hors de portée pour le moment.

On voit donc que toutes ces questions issues de la thèse de Reeb ont joué un rôle de catalyseur dans bon nombre de recherches sur les feuilletages; la plupart d'entre elles ont été résolues dans les 30 ans qui ont suivi et Reeb, après avoir rappelé le scepticisme qui avait accueilli les débuts de la théorie des feuilletages, pouvait dire avec une fierté justifiée dans la préface du livre de Godbillon [78]: " Sur une durée de quarante années l'immeuble s'est édifié; des centaines d'ouvriers ont oeuvré. L'édifice n'est pas achevé, mais on peut visiter. Oui, visiter est le mot".

References

[1] G. Frobenius, *Ueber das Pfaffsche Problem*, J. Reine Angew. Math. **82** (1877), p.230-315.

[2] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, J. de Math. (1881-1882).

[3] P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, 1895*, Oeuvres de Paul Painlevé, Tome 1, 1972.

[4] I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Matematica **24** (1901), p.1-80.

[5] C. Carathéodory, *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamic*, Math. Ann. **67** (1909), p.355-386.

[6] H. Kneser, *Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen*, Math. Ann. **91** (1924), p.135-154.

[7] H. Hopf, *Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann **96** (1927), 225-250.

[8] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore*, J. de Math. Pures et Appl. **11** (1932), p.333-375.

[9] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Matematica **60** (1932), 147-238.

[10] W. Kaplan, *Regular curve families filling the plane*, Duke Journ. **7** (1940), p.153-185.

[11] C. Ehresmann et G. Reeb, *Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables dans une variété continûement différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **218** (1944), 955-957.

[12] G.Reeb, *Sur les variétés intégrales des champs d'éléments de contact complètement intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris **220** (1945), 236-237.

[13] C. Chevalley, *Theory of Lie groups* (1946), Princeton University Press.

[14] G.Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable*, C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 847-849.

[15] C. Ehresmann, *Sur les sections d'un champ d'élements de contact dans une variété différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **224** (1947), 444-445.
[16] C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris **224** (1947), 1611-1612.
[17] G.Reeb, *Variétés feuilletées, feuilles voisines*, C. R. Acad. Sci. Paris **224** (1947), 1613-1614.
[18] C. Ehresmann, *Sur les variétés plongées dans une variété différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1948), 1879-1880.
[19] G.Reeb, *Sur les variétés feuilletées contenant une feuille compacte à groupe de Poincaré fini*, C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1948), 1337-1339.
[20] G.Reeb, *Sur les singularités d'une forme de Pfaff analytique complètement intégrable*, C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948), 1201-1203.
[21] G.Reeb, *Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 47-48.
[22] H. Cartan, *Notions d'algèbres différentielles; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 15-27.
[23] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29-55.
[24] H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 57-71.
[25] H. Seifert, *Closed integral curves in* 3*-space and isotopic deformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 287-302.
[26] C. Ehresmann, *Sur la théorie des variétés feuilletées*, Rend. Mat. e Appl. **10** (1951), 64-82.
[27] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (1952), Hermann.
[28] A. Haefliger, *Sur les feuilletages analytiques*, C. R. Acad. Sc. Paris **242** (1956), 2908-2910.
[29] C. Ehresmann et S. Weishu, *Sur les espaces feuilletés, théorème de stabilité*, C. R. Acad. Sc. Paris **243** (1956), 344-346.
[30] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. **64** ((1956)), 399-405.
[31] R.S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformations groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **22** (1957).
[32] J. Milnor, *On the existence of a connection of curvature zero*, Comment. Math. Helv. **32** (1958), 215-223.
[33] A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. **32** (1958), 248-329.
[34] B. L. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle like metrics*, Ann. of Math. **69** (1959), 119-132.
[35] C. Ehresmann, *Structures feuilletées*, Fifth Canadian Math. Congress, Montreal (1961).
[36] A. Haefliger, *Variétés feuilletées*, Ann. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1962), 367-397.
[37] S. P. Novikov, *Foliations of codimension 1 on manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **155** (1964), 1010-1013.
[38] S. P. Novikov, *Foliations of codimension 1 on manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **157** (1964), 788-790.
[39] R. Sacksteder, *Foliations and pseudogroups*, Amer. J. Math. **87** (1965), 79-102.
[40] W.B.R. Lickorish, *A foliation for* 3*-manifolds*, Ann. of Math. **81** (1965), 414-420.
[41] S. P. Novikov, *The topology of foliations*, Trudy Moskov. Mat. Obshch **14** (1965), 248-278.
[42] A. Haefliger, *Travaux de Novikov sur les feuilletages*, Séminaire Bourbaki, 1967-68 (1968).
[43] H. Rosenberg, *Foliations by planes*, Topology **7** (1968), 131-138.
[44] A. Phillips, *Foliations on open manifolds, I*, Comm. Math. Helv. **43** (1968), 204-211.
[45] A. Phillips, *Foliations on open manifolds, II*, Comm. Math. Helv. **44** (1969), 367-370.
[46] R. Bott, *On a topological obstruction to integrability*, Global Analysis, Berkeley 1968, Proc. Sympos. Pure Math. Vol XVI, 1970, pp. 127-131.
[47] J.W. Wood, *Foliations on* 3*-manifolds*, Ann. of Math. **89** (1969), 336-358.
[48] M. L. Gromov, *Stable mappings of foliations into manifolds*, Izv. Akad. Nauk SSSR **33** (1969), 707-734.
[49] A. Phillips, *Smooth maps transverse to a foliation*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 792-797.
[50] A. Haefliger, *Feuilletages sur les variétés ouvertes*, Topology **9** (1970), 183-194.
[51] A. Haefliger, *Homotopy and integrability*, Manifolds, Amsterdam, 1970, Springer Lecture Notes in Math. **197** (1971), 133-163.

[52] J. Mather, *On Haefliger's classifying space*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 1111-1115.

[53] H.B. Lawson, *Codimension one foliations of spheres*, Ann. of Math. **94** (1972), 494-503.

[54] C. Godbillon et J. Vey, *Un invariant des feuilletages de codimension* 1, C. R. Acad. Sc., Paris **273** (1971), 92-95.

[55] J.N. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology **10** (1971), 297-298.

[56] L.C. Siebenmann, *Deformation of homeomorphisms on stratified sets I, II*, Comm. Math. Helv. **47** (1972), 123-163.

[57] D. B. A. Epstein, *Periodic flows on three manifolds*, Ann. of Math, **95** (1972), 66-82.

[58] W.P. Thurston, *A local construction of foliations for three-manifolds*, Differential Topology, Stanford, 1973, Proc. Sympos. Pure Math. **27-1** (1975), 315-319.

[59] W.P. Thurston, *The theory of foliations in dimension greater than one*, Comm. Math. Helv. **49** (1974), 2314-231.

[60] W.P. Thurston, *Foliations and group of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 304-307.

[61] H.T. Lawson, *Foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 369-418.

[62] W.T. Thurston, *A generalization of the Reeb stability theorem*, Topology **13** (1974), 347-352.

[63] W.P. Thurston, *On the construction and classification of foliations*, Proceedings of the ICM, Vancouver, 1974, tome 1, 547-549.

[64] J.N. Mather, *Foliations and local homology of groups of diffeomorphisms*, Proceedings of the ICM, Vancouver, 1974, tome 2, 35-37.

[65] W.P. Thurston, *Existence of codimension one foliation*, Ann. of Math. **104** (1976), 249-268.

[66] R. Edwards, K.C. Millet, D. Sullivan, *Foliations with all leaves compact*, Topology **16** (1977), 13-32.

[67] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **46** (1976), 5-14.

[68] R. Moussu, *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff*, Ann. Inst. Fourier **26-2** (1976), 171-220.

[69] B. Malgrange, *Frobenius avec singularités, I. Codimension un*, Publications Mathématiques I.H.E.S. **46** (1976), 163-173.

[70] G. Reeb, *Structures feuilletées*, Differential Topology, Foliations and Gelfand-Fuks cohomology, Rio de Janeiro, 1976, Springer Lecture Notes in Math. **652** (1978), 104-113.

[71] B. L. Reinhart, *Differential Geometry of Foliations*, vol. 99, Springer Verlag.

[72] A. Haefliger, *Holonomie et classifiants*, Structure transverse des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque **116** (1984), 70-97.

[73] E. Vogt, *A foliation of* $\mathbb{R}^3$ *and other punctured 3-manifolds by circles*, Publ. Math. IHES **69** (1989), 215-232.

[74] E. Ghys, *L'invariant de Godbillon-Vey*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89, Astérisque **177-178** (1989), 155-181.

[75] C. Ehresmann, *Oeuvres complètes et commentées, I-1,2 Topologie algébrique, topologie différentielle. II.2 Catégories ordonnées. Applications des ordres en topologie*, Cahiers de Topologie Géom. Différentielle, Suppléments aux volumes 23 et 24. (1984, 1982).

[76] T. Tsuboi, *On the connectivity of the classifying spaces for foliations*, Algebraic Topology (Evanston, Il, 1988), Contemp. Math. **96** (1989), Amer. math. Soc., Providence, RI, 319-331.

[77] T. Tsuboi, *On the foliated products of class* C^1, Ann. of Math. **130** (1989), 227-271.

[78] C. Godbillon, *Feuilletages, Études géométriques*, Birkäuser, 1991.

[79] E. Ghys, *Constructions de champs de vecteurs sans orbite périodique (d'après Kristyna Kuperberg)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94, Astérisque **227** (1995), 283-307.

[80] D. Gabai, *Foliations and* 3*-manifolds*, Proc. ICM Kyoto 1990 (1991), Math. Soc. Japan, 609-619.

[81] R. Bott, *Collected Papers*, vol. 3 (Robert D. MacPhearson, ed.), Birkhäuser, 1994-95.

[82] E. Ghys, *Les systèmes dynamiques holomorphes*, Dynamique et géométrie complexe (Lyon 1997), Panor. et Synthèses **8** (1999), Soc. Math. France, Paris, 1-10.

[83] Y. Eliashberg and N.M. Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings III, Foliations of codimension greater than one*, Topological Methods Nonlinear Analysis **11** (1998), 321-350.

[84] Encyclopedia of Mathematics. An updated and annotated translation of the Soviet Mathematics Encyclopedia, Kluwer Academic Publishers.

Section de Mathématiques, 2-4 Rue du Lièvre, 1211 Genève 24